درس‌نامه

ترجمه: مسعود بهرامی بیدکلمه، دبیر ریاضی تهران

توابع مثلثاتی

درس‌نامه‌ای از وبگاه Math-prof.com

در دنیای جدید، معنای «کمک‌آموزشی»، تغییرات اساسی یافته است. فناوری اطلاعات و ارتباطات، دسترسی به منابع را تسهیل نموده است. در نتیجه، با اندکی مطالعه و تغییر دیدگاه، می‌توان برای بدیل‌های خلاق، مؤثر، کم‌هزینه و با سهولت به منابع کمکی، امکان‌سنجی نمود. برای این شماره، یکی از معلمان عزیز ریاضی سرکار خانم مریم شاه‌محمدی، نرم‌افزار و سایتی را به‌نام Math-prof.com معرفی نمودند که ما را با دنیای وسیعی از درس‌نامه‌های ریاضی آشنا کرد.

تا سال ۲۰۰۸، این سایت، ۲۹۵ فصل ریاضی را با نمایه‌های موضوعی در دسته‌های وسیع‌تر، معرفی کرده و آموزش داده است. برای معرفی این سایت که قابل دسترس و مجانی است و استفاده از آن، به دانش زبان انگلیسی بالایی جز واژگان تخصصی هر حوزه، نیازی ندارد. آقای مسعود بهرامی بیدکلمه، بخش‌هایی از فصل **مثلثات** این وبگاه را ترجمه کرده است.

فصل مثلثات این سایت، شامل ۱۸ بخش است و شروع آن، با هندسه (رویکرد تلفیقی) و معرفی نسبت‌های مثلثاتی از این طریق است. سپس با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه، به سینوس و کسینوس پرداخته و به‌تدریج، وارد رسم نمودارهای تابع‌های مثلثاتی شده است. بعداً، با اشاره به انتقال، رادیان به‌عنوان یکی از اندازه‌های زاویه مطرح شده است و نشان داده که چگونه به‌تدریج، وارد نمادهای مختصات قطبی، معادلات مثلثاتی به‌صورت قطبی، اتحادهای مثلثاتی، اتحادهای اساسی، فرمول‌های نصف زاویه و دو برابر زاویه، اعداد موهومی، اعداد مختلط و مساحت پنج‌ضلعی شده است.

نکته مهم در این درس‌نامه‌ها این است که با پایه‌ای‌ترین مفهوم‌ها ـ در اینجا زاویه ـ شروع شده، به مرور با سرعت مناسب، مفهوم‌ها توسعه پیدا کرده، مثال‌های مربوط آورده شده، از نمودار به‌خوبی استفاده شده و ارتباط مثلثات با مباحث مختلف ریاضی، با تأنی لازم، نشان داده شده است.

هر یک از درس‌نامه‌های این سایت، می‌تواند دانش‌آموزان را از خریدن کتاب‌های متعدد موضوعی که گاهی می‌تواند حتی باعث سردرگمی آن‌ها شود، بی‌نیاز کند. در هر صورت بد نیست معلمان عزیز ریاضی به این وبگاه سر بزنند و برای کلاس درس خود، درس‌نامه‌های مناسب با نیاز تدریس خود را انتخاب کنند و به صلاحدید خود، آن را به دانش‌آموزان نیز معرفی کنند. این شما و این بخشی از درس‌نامه مثلثات این سایت!

سردبیر

مروری بر فصل مثلثات

بنابر ساده‌ترین تعریف، تابع‌های مثلثاتی تابع‌هایی هستند که رابطهٔ بین یکی از زاویه‌های غیرقائمهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه را با نسبت دو ضلع آن مثلث بیان می‌کنند (و یا برعکس). به این ترتیب، هر تابع مثلثاتی، مانند f، همواره در یکی از تساوی‌های زیر صدق می‌کند:

$$f(q) = \frac{a}{b} \qquad (۱)$$

یا

$$f(\frac{a}{b}) = q \qquad (۲)$$

که در آن q اندازهٔ یکی از زاویه‌های مثلث و a و b طول دو ضلع مثلث هستند.

این به معنی آن است که:

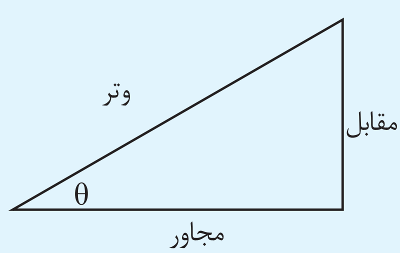
- اگر رابطهٔ (۱) برقرار باشد، در هر مثلث قائم‌الزاویه با دانستن مقدار هر یک از زاویه‌های غیرقائمه، با محاسبهٔ مقدار تابع مثلثاتی به ازای آن زاویه، نسبت دو ضلع آن مثلث به‌دست خواهد آمد.
- در صورتی‌که رابطهٔ (۲) برقرار باشد، می‌توانیم نسبت طول دو ضلع هر مثلث قائم‌الزاویه به یکدیگر را بیابیم و با محاسبه مقدار تابع مثلثاتی به ازای این نسبت، اندازهٔ یکی از زاویه‌های غیرقائمهٔ آن مثلث به‌دست خواهد آمد (چنین تابع‌هایی، تابع‌های مثلثاتی معکوس نامیده می‌شوند، زیرا عملکرد آن‌ها عکس تابع‌های قبلی است.)

رابطهٔ بین زاویه‌های یک مثلث قائم‌الزاویه و نسبت دو ضلع آن از مهم‌ترین عناصر در بحث مثلثات است. با توجه به اینکه روابط مثلثاتی در همهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه برقرارند، اگر اندازهٔ یکی از زاویه‌های غیرقائمهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه را بدانیم، می‌توانیم نسبت اضلاع آن مثلث را با استفاده از تابع‌های مثلثاتی بیابیم و اگر نسبت اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه را بدانیم، می‌توانیم با استفاده از تابع‌های مثلثاتی معکوس، اندازهٔ زاویه‌های آن را به‌دست آوریم.

مهم‌تر اینکه اگر اندازهٔ یکی از زاویه‌ها را بدانیم، می‌توانیم نسبت دو ضلع مثلث را با استفاده از تابع‌های مثلثاتی به‌دست آوریم؛ همچنین، با در اختیار داشتن اندازهٔ یکی از اضلاع می‌توانیم با استفاده از روش جبری اندازهٔ ضلع دیگر را نیز مشخص کنیم (به‌عنوان مثال اگر مشخص شود که $\frac{a}{b} = ۲$ و بدانیم که $a = ۶$ آنگاه نتیجه می‌گیریم که $b = ۳$).

از آنجا که در هر مثلث قائم‌الزوایه، سه ضلع و دو زاویهٔ غیرقائمه وجود دارد، باید روشی در اختیار داشته باشیم که مشخص کند هر تابع مثلثاتی رابطهٔ بین کدام زاویه را با کدام ضلع‌ها بیان می‌کند (اینکه بدانیم نسبت دو ضلع برابر با ۲ است، اما ندانیم دربارهٔ نسبت کدام‌یک از سه ضلع صحبت می‌کنیم، چندان مفید نیست. به‌همین ترتیب، اگر بدانیم اندازهٔ یکی از زاویه‌ها ۴۰ درجه است، باید بدانیم منظور کدام زوایه است).

مطابق قرارداد، اگر زاویهٔ مورد نظر را مطابق شکل زیر با θ (تتا) نشان دهیم، اضلاع مثلث را به‌صورت زیر «ضلع مجاور»، «ضلع مقابل» و «وتر» می‌نامیم:



همان‌طور که پیشتر نیز اشاره شد، تابع‌های مثلثاتی نوع (۱) که به هر زاویه نسبت دو ضلع را اختصاص می‌دهند، همواره در چنین رابطه‌ای صدق می‌کنند:

$$f(q) = \frac{a}{b}$$

از آنجا که به ازای هر زاویه، ۳ راه برای انتخاب صورت این کسر و ۳ راه برای انتخاب مخرج آن وجود دارد، می‌توانیم ۹ تابع مثلثاتی به‌صورت زیر داشته باشیم:

$f(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$	$f(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$	$f(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مقابل}}$
$f(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$	$f(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مجاور}}$	$f(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$
$f(q) = \frac{\text{وتر}}{\text{وتر}}$	$f(q) = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}}$	$f(q) = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}}$

از این توابع سه تابع که نشانگر نسبت یک ضلع به خودش هستند، و در قطر جدول فوق آمده‌اند، همواره برابر با ۱ هستند و هیچ استفاده‌ای برای ما ندارند. پس آن‌ها را نادیده می‌گیریم و به ۶ تابع باقی‌مانده اسامی زیر را نسبت می‌دهیم:

$\text{cosecant}(q) = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}}$	$\text{sine}(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$
$\text{secant}(q) = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}}$	$\text{cosine}(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$
$\text{cotangent}(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$	$\text{tangent}(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$

علاوه بر این، اسامی این تابع‌ها معمولاً به اختصار به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

cosecant = csc　　sine = sin

secant = sec　　cosine = cos

cotangent= cot　　tangent = tan

از این شش تابع دو تابع اصلی که باید آن‌ها را به‌خاطر بسپاریم سینوس و کسینوس هستند. سایر تابع‌های مثلثاتی نوع اول را می‌توان از این دو تابع استخراج کرد.

به‌عنوان مثال تابع‌های ستون سمت راست جدول قبل، معکوس ضربی تابع‌های ستون سمت چپ آن جدول هستند. علاوه بر این،

$$\frac{\sin(q)}{\cos(q)} = \frac{\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}}{\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \tan(q)$$

و به این ترتیب، تابع تانژانت، حاصل تقسیم سینوس بر کسینوس است.

$\csc(q) = \frac{۱}{\sin(q)}$	$\sin(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$
$\sec(q) = \frac{۱}{\cos(q)}$	$\cos(q) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$
$\cot(q) = \frac{۱}{\tan(q)}$	$\tan(q) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$

با بررسی بیشتر این تابع‌ها می‌بینید که به ازای سه تابع سینوس، کسینوس و تانژانت سه تابع دیگر وجود دارند که نام آن‌ها با افزودن پیشوند co به نام این تابع‌ها به‌دست آمده است. این تابع‌ها معکوس ضربی تابع‌های سینوس، کسینوس و تانژانت هستند. اما برای این نامگذاری توجیهی وجود دارد؛ این تابع‌ها در واقع برابر با سینوس، سکانت یا تانژانت زاویه‌ای هستند که متمم زاویهٔ نظیر آن‌هاست و با توجه به اینکه متمم هر زاویه مانند q برابر با ۹۰ -q است، می‌توان نشان داد که روابط زیر برقرارند:

$$\sin(۹۰ - q) = \text{cosine}(q)$$

$$\text{secant}(۹۰ - q) = \text{cosecant}(q)$$

$$\text{tangent}(۹۰ - q) = \text{cotangent}(q)$$

که این شیوهٔ نامگذاری را توجیه می‌کند.

بسته به انتخاب واحدهای متفاوتی نظیر درجه، گراد و رادیان، تابع‌های مثلثاتی مقادیر متفاوتی را اختیار می‌کنند.

به‌عنوان مثال:

$$\sin(۹۰^\circ) = ۱$$

ولی اگر q برحسب رادیان بیان شده باشد

$$\sin(۹۰) = ۰/۸۹۳۹۹...$$

تابع‌های مثلثاتی معکوس

تابع‌های مثلثاتی نوع (۱) را به‌صورت زیر تعریف کردیم:

$$f(q) = \frac{a}{b}$$

که در آن q یکی از زاویه‌های غیرقائمه و $\frac{a}{b}$ نسبت دو ضلع از اضلاع مثلث است. با توجه به این مطلب، می‌توانیم عکس این کار را هم انجام دهیم و تابع‌هایی را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = q$$

$\text{arccosecant}\ \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}} = q$	$\text{arcsine}\ \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = q$
$\text{arcsecant}\ \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}} = q$	$\text{arccosine}\ \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = q$
$\text{arccotangent}\ \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = q$	$\text{arctangent}\ \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = q$

که ورودی آن‌ها نسبت دو ضلع مثلث و خروجی آن‌ها اندازهٔ یکی از زاویه‌هاست. این تابع‌ها به‌صورت زیر نامگذاری می‌شوند:

شبیه به حالت قبلی برای نمایش این توابع از نمادهای اختصاری زیر استفاده می‌شود:

arcsine = arcsin　　arccosecant = arccsc

arccosine = arccos　　arcsecant = arcsec

arctangent = arctan　　arccotangent = arccot

با توجه به نمایش استاندارد معکوس توابع، یعنی $f^{-۱}$، ممکن است با نمایش توابع مثلثاتی معکوس، به‌صورت زیر نیز مواجه شویم:

$\sin^{-۱}$, $\cos^{-۱}$, $\sec^{-۱}$, $\csc^{-۱}$, $\tan^{-۱}$, $\cot^{-۱}$

توجه: برای نمایش مربع توابع مثلثاتی بیش از یک نمایش وجود دارد. به‌عنوان مثال $(\sin\theta)^۲$ به‌صورت $\sin^۲\theta$ نیز نمایش داده می‌شود. این ممکن است سبب ایجاد این ابهام شود:

$\tan^{-1}\theta = (\tan\theta)^{-1}$

که صحیح نیســت. نمای منفی در این مورد یک حالت خاص اســت که به وارون ضربی دلالت نمی‌کند بلکه نشان‌دهندهٔ تابع وارون است.

مقادیر توابع مثلثاتی برحسب واحدهای متفاوت اندازه‌گیری

توابع مثلثاتی برحسب واحدهای اندازه‌گیری متفاوت، مقادیر متفاوتی را به زاویه‌ها نسبت می‌دهند. به‌عنوان مثال $\sin ۹۰° = ۱$ در حالی‌که اگر واحد اندازه‌گیری رادیان باشــد، $\sin ۹۰ = ۰/۸۹۳۹۹...$ اگر بعد از عدد نظیر اندازهٔ زاویه، علامت ° باشد، در اختصاص مقادیر به نسبت‌های مثلثاتی واحد اندازه‌گیری زاویه، درجه در نظر گرفته خواهد شد. اگر پس از عدد نظیر اندازهٔ زاویه هیچ واحدی ذکر نشده باشد، در اختصاص مقدار به نسبت‌های مثلثاتی، زاویه برحسب رادیان در نظر گرفته می‌شــود. دلیل اینکه در بیان زاویه‌ها برحسب رادیان از ذکر واحد خودداری می‌شود این است که در اندازه‌گیری بزرگی زاویه‌ها به این صورت، رادیان واحدی طبیعی به‌حساب می‌آید. برای این مطلب در حساب دیفرانسیل و انتگرال توجیه‌هایی ارائه می‌شود. یکی از دلایل این مطلب این است که بیان مساحت قطاع‌های دایره، زمانی‌که زاویه برحسب رادیان بیان شود ساده‌تر است.

در بســیاری از ماشین‌حســاب‌ها، ســه حالت درجه، گراد و رادیان با هم وجود دارد. این بسیار مهم است که در جریان محاسبهٔ مقادیر تابع‌های مثلثاتی، ماشین‌حساب را در حالت درست قرار دهیم. چرا که این کار به ما می‌گوید که ماشین‌حساب در محاسبهٔ مقادیر مثلثاتی چه واحدی را برای اندازه‌گیری زاویه‌ها مبنا قرار می‌دهد. به‌عنوان مثال، اگر ماشین‌حساب در حالت درجه قرار داشته باشد، برای $\sin ۹۰°$ مقدار ۱ را به‌عنوان خروجی در اختیار ما می‌گذارد. در حالی‌که اگر در حالت رادیان تنظیم شده باشد، خروجی آن به‌صورت $۰/۸۹۳۹۹...$ خواهد بود. عدم تنظیم درست تنظیمات ماشین‌حساب یکی از اشتباه‌های رایج در میان کسانی است که با این مفاهیم تازه آشنا شده‌اند؛ به‌خصوص کسانی که فقط با واحد درجه آشنایی دارند بیشتر این اشتباه را مرتکب می‌شوند. برای بیان سازگاری مقادیر متفاوتی که با انتخاب واحدهای متفاوت به‌دست می‌آید، می‌توانیم نماد درجه را چنین تعریف کنیم که این نماد برابر با $\pi/۱۸۰$ است. به این ترتیب $\sin ۹۰°$ در واقع بیان دیگری برای اشاره به سینوس زاویه است که باید مقدار آن را برحسب رادیان در نظر بگیریم. به این ترتیب:

$$\sin ۹۰° = ۱ = \sin ۹۰\frac{\pi}{۱۸۰} = \sin\frac{\pi}{۲}$$

با استفاده از این روش می‌توان مقادیر توابع مثلثاتی را برحسب رادیان محاسبه کرد. این کار شبیه همان کاری اســت که در تعریف نماد درصد به‌عنوان کسر $\frac{۱}{۱۰۰}$ انجام می‌دهیم تا بتوانیم درصدهای متفاوت را در قالب کسرها نمایش دهیم. به‌عنوان مثال ۵۰ درصد در این روش به‌صورت کسر

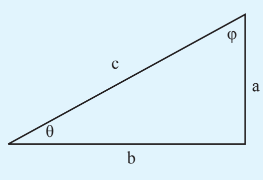
$$۵۰ \text{ درصد } = ۵۰\times\frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲}$$

نمایش داده می‌شود.

اختصاص نام به ضلع‌ها

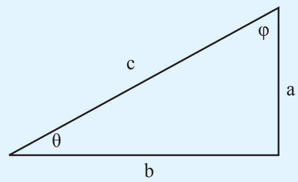
از آنجایی که در هر مثلث قائم‌الزاویه، سه ضلع و دو زاویهٔ حاده وجود دارد، در جریان کار با تابع‌های مثلثاتی نیازمند روشی هستیم که براساس آن بدانیم چه ضلع‌هایی با چه زاویه‌هایی در ارتباط هستند. بدیهی است که دانستن اینکه نسبت دو ضلع برابر با ۲ است، بدون آنکه بدانیم نسبت کدام دو ضلع برابر با این عدد است، چندان مفید نخواهد بود. به‌همین ترتیب، اگر به این نتیجه برسیم که اندازهٔ زاویه‌ای ۴۰° است، باید بدانیم منظور کدام‌یک از زاویه‌هاست. پس به روشی برای نامگذاری اضلاع نیاز داریم.

مطابق شکل زیر مثلثی قائم‌الزاویه را در نظر بگیرید.



مثلـث قائم‌الزاویــه دو زاویۀ حاده دارد که یکی از آن‌ها را به‌عنوان زاویۀ مورد نظرمان در نظر می‌گیریم و آن را با θ نمایش می‌دهیم. به این ترتیب می‌توانیم سه ضلع مثلث را به‌صورتی منحصر به فرد با توجه به این زاویه نامگذاری کنیم. همان‌طور که در شکل فوق دیده می‌شود، اینکه θ کدام زاویه باشد، در نامگذاری ما مؤثر است. سه ضلع را مطابق الگوی زیر نامگذاری می‌کنیم. ضلع روبروی زاویۀ قائمه را وتر می‌نامیم. این نامگذاری به انتخاب θ بستگی ندارد اما نامگذاری دو ضلع دیگر به این موضوع وابسته است. برای اشاره به دو ضلع دیگر از اصطلاح‌های ضلع مجاور و ضلع مقابل استفاده می‌کنیم. از میان دو ضلع باقی‌ماندۀ آن که یکی از اضلاع θ است، ضلع مجاور نامیده می‌شود و تنها ضلعی که تاکنون نامگذاری نشده ضلع مقابل نامیده می‌شود.

اتحادهای مثلثاتی



$\sin\theta = \dfrac{a}{c}$	$\csc\theta = \dfrac{۱}{\sin\theta} = \dfrac{c}{a}$
$\cos\theta = \dfrac{b}{c}$	$\sec\theta = \dfrac{۱}{\cos\theta} = \dfrac{c}{b}$
$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{a}{b}$	$\cot\theta = \dfrac{۱}{\tan\theta} = \dfrac{b}{a}$

$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

$\csc(-\theta) = -\csc\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sec(-\theta) = \sec\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

$\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$

$\tan^۲ x + ۱ = \sec^۲ x$

$\cot^۲ x + ۱ = \csc^۲ x$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \mp \sin x \sin y$

$\tan(x \pm y) = (\tan x \pm \tan y) / (۱ \mp \tan x \tan y)$

$\sin(۲x) = ۲\sin x \cos x$

$\cos(۲x) = \cos^۲(x) - \sin^۲(x) = ۲\cos^۲(x) - ۱ = ۱ - ۲\sin^۲(x)$

$\tan(۲x) = ۲\tan(x) / (۱ - \tan^۲(x))$

$\sin^۲(x) = ۱/۲ - ۱/۲\cos(۲x)$

$\cos^۲(x) = ۱/۲ + ۱/۲\cos(۲x)$

$\sin x - \sin y = ۲\sin((x-y)/۲)\cos((x+y)/۲)$

$\cos x - \cos y = -۲\sin((x-y)/۲)\sin((x+y)/۲)$

مثلث را با اضلاع a و b و c زاویه‌های A، B و C در نظر بگیرید. در این‌صورت

$a/\sin(A) = b/\sin(B) = c/\sin(C)$

و

$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos(C)$

$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos(B)$

$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos(A)$

همچنین

$(a-b)/(a+b) = \tan[(A-B)/۲] / \tan[(A+B)/۲]$

از خوانندگان عزیز دعوت می‌شود که برای مشاهده سایر بخش‌های مرتبط با این فصل و سایر فصل‌ها به این سایت مراجعه کنند.